Función signo

Sea la función $sign: \mathbb{R} \to \{-1,0,1\}$ definida así:

$$sign(x) = \begin{cases} -1, & x < 0 \\ 0, & x = 0 \\ 1, & x > 0 \end{cases}$$

Para una aproximación mediante una función continuamente diferenciable se define como límite de otras funciones (convergencia puntual). Por ejemplo:

$$sign(x) = \lim_{n\to\infty} \tanh(nx)$$

Ejemplo. Sea la función $\delta: \mathbb{R} \to \{0,1\}$ definida así:

$$\delta(x) = \begin{cases} 0, & x \neq 0 \\ 1, & x = 0 \end{cases}$$

$$\delta(x) = 1 - sign^2(x)$$

Se obtiene la siguiente desigualdad:

$$\delta\left(\prod_k x_k\right) \leq \sum_k \delta(x_k)$$

La igualdad sólo es válida si existe un único término de la sucesión $\{x_k\}_{k\in\mathbb{N}}$ igual a cero.

Función signo infinito

Sea la función $sign_\infty: \mathbb{R} \to \{-\infty, 0, +\infty\}$ definida así:

$$sign_\infty(x) = \begin{cases} -\infty, & x < 0 \\ 0, & x = 0 \\ +\infty, & x > 0 \end{cases}$$

$$sign_\infty(x) = \frac{sign(x)}{\delta(x)}$$

Ejemplo. Sean $a \in \mathbb{R}$ y la función $\varphi_a: \mathbb{R} \to \{-\infty, 0, +\infty\}$ definida así:

$$\varphi_a(x) = \begin{cases} -\infty, & a < 0 \wedge x = a \\ 0, & a = 0 \vee x \neq a \\ +\infty, & a > 0 \wedge x = a \end{cases}$$

$$\varphi_a(x) = sign_\infty\big(a\delta(x-a)\big)$$

Función escalón de Heaviside

Sea la función $H: \mathbb{R} \to \{0, 1/2, 1\}$ definida así:

$$H(x) = \begin{cases} 0, & x < 0 \\ 1/2, & x = 0 \\ 1, & x > 0 \end{cases}$$

$$H(x) = \frac{1}{2}\big(1 + sign(x)\big)$$

Luego,

$$\delta(x) = 4H(x)\big(1 - H(x)\big)$$

Función valor absoluto

Sea la función $|\quad|: \mathbb{R} \to \mathbb{R}^{+} \cup \{0\}$ definida así:

$$|x| = \begin{cases} -x, & x < 0 \\ x, & x \geq 0 \end{cases}$$

$$|x| = xsign(x)$$

Funciones mínimo y máximo

Sea la función $min: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ definida así:

$$min(x, y) = \begin{cases} x, & x < y \\ y, & x \geq y \end{cases}$$

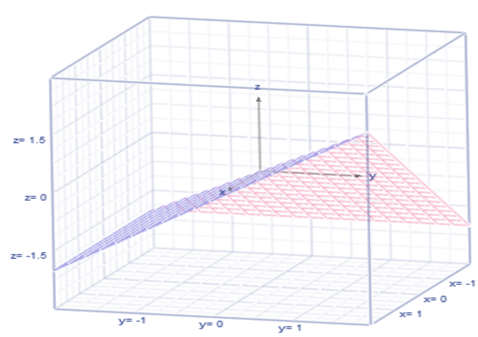
En la expresión $\big(1 - H(x-y)\big)x + H(x-y)y$, la discontinuidad en $x = y$ es removible. Así se obtiene:

$$min(x, y) = \frac{1}{2}\big((x+y) - |x-y|\big)$$

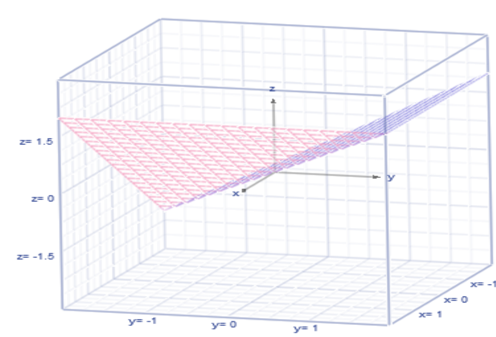
Luego, la función $max: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ se define así:

$$max(x, y) = \begin{cases} x, & x \geq y \\ y, & x < y \end{cases}$$

$$max(x, y) = (x+y) - min(x, y) = \frac{1}{2}\big((x+y) + |x-y|\big)$$



$z = min(x, y)$



$z = max(x, y)$

Función indicatriz de un intervalo cerrado

Sean $a, b \in \mathbb{R}$ con $a < b$. Se define la función $\boldsymbol{I}_{[a,b]}: \mathbb{R} \to \{0,1\}$, así:

$$\boldsymbol{I}_{[a,b]}(x) = \begin{cases} 0, & x \notin [a, b] \\ 1, & x \in [a, b] \end{cases}$$

$$\boldsymbol{I}_{[a,b]}(x) = sign\big(sign(x-a) - sign(x-b)\big)$$

Función indicatriz de intervalos abiertos y semiabiertos

$$\boldsymbol{I}_{]-\infty,b]}(x) = \lim_{a\to-\infty} \boldsymbol{I}_{[a,b]}(x) = sign\big(1 - sign(x-b)\big)$$
$$\boldsymbol{I}_{]a,+\infty[}(x) = 1 - \boldsymbol{I}_{]-\infty,a]}(x) = 1 - sign\big(1 - sign(x-a)\big)$$
$$\boldsymbol{I}_{]a,b]}(x) = \boldsymbol{I}_{]a,+\infty[}\boldsymbol{I}_{]-\infty,b]}(x) = \Big(1 - sign\big(1 - sign(x-a)\big)\Big)\, sign\big(1 - sign(x-b)\big)$$
$$\boldsymbol{I}_{[a,+\infty[}(x) = \lim_{b\to+\infty} \boldsymbol{I}_{[a,b]}(x) = sign\big(1 + sign(x-a)\big)$$
$$\boldsymbol{I}_{]-\infty,b[}(x) = 1 - \boldsymbol{I}_{[b,+\infty[}(x) = 1 - sign\big(1 + sign(x-b)\big)$$
$$\boldsymbol{I}_{[a,b[}(x) = \boldsymbol{I}_{[a,+\infty[}\boldsymbol{I}_{]-\infty,b[}(x) = sign\big(1 + sign(x-a)\big)\Big(1 - sign\big(1 + sign(x-b)\big)\Big)$$
$$\boldsymbol{I}_{]a,b[}(x) = \boldsymbol{I}_{]a,+\infty[}\boldsymbol{I}_{]-\infty,b[}(x) = \Big(1 - sign\big(1 - sign(x-a)\big)\Big)\Big(1 - sign\big(1 + sign(x-b)\big)\Big)$$

Ejemplo. Sea $a \in \mathbb{R}^+$:

$$\boldsymbol{I}_{]-a,a[}(x) = 1 - sign\big(1 - sign(a - |x|)\big)$$

$$\boldsymbol{I}_{]-a,a[^2}(x,y) = 1 - sign\Big(2 - \big(sign(a-|x|) + sign(a-|y|)\big)\Big)$$

Ejemplo

$$2\boldsymbol{I}_{[0,+\infty[}(x) - 1 = \begin{cases} -1, & x < 0 \\ 1, & x \geq 0 \end{cases}$$

Ejemplo

$$\delta(x) = \boldsymbol{I}_{]-\infty,0]}(x)\boldsymbol{I}_{[0,+\infty[}(x)$$

Propiedades

Sea $\boldsymbol{\mathcal{F}}$ la familia de intervalos (cerrados, abiertos y semiabiertos) de $\mathbb{R}$ a la que pertenecen el conjunto vacío (igualdad de extremos) y $]-\infty,+\infty[$. Si $A, B \in \boldsymbol{\mathcal{F}}$, entonces:

$\boldsymbol{I}_{\emptyset} = 0$
$\boldsymbol{I}_{\mathbb{R}} = 1$
$\boldsymbol{I}_{A\cap B} = \boldsymbol{I}_A\boldsymbol{I}_B$, (intersección de intervalos)
$\boldsymbol{I}_{A\setminus B} = \boldsymbol{I}_A(1 - \boldsymbol{I}_B)$, (diferencia de intervalos)
$\boldsymbol{I}_{A\cup B} = \boldsymbol{I}_A + \boldsymbol{I}_B - \boldsymbol{I}_A\boldsymbol{I}_B$, (unión de intervalo)
$\boldsymbol{I}_{A\Delta B} = \boldsymbol{I}_A + \boldsymbol{I}_B - 2\boldsymbol{I}_A\boldsymbol{I}_B$, (diferencia simétrica de intervalos)
$\boldsymbol{I}_{A\times B}(x,y) = \boldsymbol{I}_A(x)\boldsymbol{I}_B(y)$, (producto cartesiano de intervalos)

También,

$$\boldsymbol{I}_{A\Delta B} = |\boldsymbol{I}_A - \boldsymbol{I}_B|$$

Identidades de De Morgan

$1 - \boldsymbol{I}_{A\cap B} = 1 - \boldsymbol{I}_A\boldsymbol{I}_B$
$1 - \boldsymbol{I}_{A\cup B} = (1 - \boldsymbol{I}_A)(1 - \boldsymbol{I}_B)$

Relaciones entre intervalos

Inclusión

$$\underbrace{\delta\big(inf(A)-inf(B)\big)\Big(\boldsymbol{I}_B\big(inf(B)\big)+\Big(1-\boldsymbol{I}_B\big(inf(B)\big)\Big)\Big(1-\boldsymbol{I}_A\big(inf(A)\big)\Big)\Big)+\Big(1-\delta\big(inf(A)-inf(B)\big)\Big)\boldsymbol{I}_B\big(inf(A)\big)}_{h}=1$$

(Si el ínfimo de los intervalos coincide, entonces, si B es abierto por la izquierda A también, pero si el ínfimo no coincide, entonces, el ínfimo de A está en B)

$$\underbrace{\delta\big(sup(A)-sup(B)\big)\Big(\boldsymbol{I}_B\big(sup(B)\big)+\Big(1-\boldsymbol{I}_B\big(sup(B)\big)\Big)\Big(1-\boldsymbol{I}_A\big(sup(A)\big)\Big)\Big)+\Big(1-\delta\big(sup(A)-sup(B)\big)\Big)\boldsymbol{I}_B\big(sup(A)\big)}_{k}=1$$

(Si el supremo de los intervalos coincide, entonces, si B es abierto por la derecha A también, pero si el supremo no coincide, entonces, el supremo de A está en B). Por tanto,

$$hk=\begin{cases}0, & A\nsubseteq B\\ 1, & A\subseteq B\end{cases}$$

Luego,

$$\underbrace{\delta\big(inf(A)-inf(B)\big)\Big(\boldsymbol{I}_A\big(inf(A)\big)+\Big(1-\boldsymbol{I}_A\big(inf(A)\big)\Big)\Big(1-\boldsymbol{I}_B\big(inf(B)\big)\Big)\Big)+\Big(1-\delta\big(inf(A)-inf(B)\big)\Big)\boldsymbol{I}_A\big(inf(B)\big)}_{h'}=1$$

(Si el ínfimo de los intervalos coincide, entonces, si A es abierto por la izquierda B también, pero si el ínfimo no coincide, entonces, el ínfimo de B está en A)

$$\underbrace{\delta\big(sup(A)-sup(B)\big)\Big(\boldsymbol{I}_A\big(sup(A)\big)+\Big(1-\boldsymbol{I}_A\big(sup(A)\big)\Big)\Big(1-\boldsymbol{I}_B\big(sup(B)\big)\Big)\Big)+\Big(1-\delta\big(sup(A)-sup(B)\big)\Big)\boldsymbol{I}_A\big(sup(B)\big)}_{k'}=1$$

(Si el supremo de los intervalos coincide, entonces, si A es abierto por la derecha B también, pero si el supremo no coincide, entonces, el supremo de B está en A). Por tanto,

$$h'k'=\begin{cases}0, & B\nsubseteq A\\ 1, & B\subseteq A\end{cases}$$

Igualdad

$A=B$ si y sólo si $A\subseteq B$ y $B\subseteq A$. Sobre intervalos también se puede plantear de la siguiente manera:

Si $\underbrace{\Big|1-\Big(\boldsymbol{I}_A\big(inf(B)\big)+\boldsymbol{I}_B\big(inf(A)\big)\Big)\Big|}_{p}=1$, entonces los intervalos tienen el mismo extremo inferior.

Si $\underbrace{\Big|1-\Big(\boldsymbol{I}_A\big(sup(B)\big)+\boldsymbol{I}_B\big(sup(A)\big)\Big)\Big|}_{q}=1$, entonces los intervalos tienen el mismo extremo superior.

Por tanto,

$$pq=\begin{cases}0, & A\neq B\\ 1, & A=B\end{cases}$$

Inclusión propia

$\underbrace{\boldsymbol{I}_B\big(inf(A)\big) + \Big(1 - \boldsymbol{I}_B\big(inf(A)\big)\Big)\,\delta\big(inf(A) - inf(B)\big)\Big(1 - \boldsymbol{I}_B\big(inf(B)\big)\Big)}_{u} = 1$ (El ínfimo de A está en B pero si no es así, si el ínfimos de los intervalos coincide, entonces, el ínfimo de B no está en B)

$\underbrace{\boldsymbol{I}_B\big(sup(A)\big) + \Big(1 - \boldsymbol{I}_B\big(sup(A)\big)\Big)\,\delta\big(sup(A) - sup(B)\big)\Big(1 - \boldsymbol{I}_B\big(sup(B)\big)\Big)}_{v} = 1$ (El supremo de A está en B pero si no es así, si el supremo de los intervalos coincide, entonces, el supremo de B no está en B)

Por tanto,

$$(1 - pq)uv = \begin{cases} 0, & A \not\subset B \\ 1, & A \subset B \end{cases}$$

Disyunción

Si $\underbrace{\boldsymbol{I}_A\big(inf(B)\big)\boldsymbol{I}_B\big(sup(A)\big) + \boldsymbol{I}_A\big(sup(B)\big)\boldsymbol{I}_B\big(inf(A)\big)}_{r} = 1$, entonces un intervalo comparte su supremo mientras que el otro comparte su ínfimo sin llegar a estar incluido uno en el otro. Por tanto,

$$r + hk + h'k' - hkh'k' = \begin{cases} 0, & A \cap B = \emptyset \\ 1, & A \cap B \neq \emptyset \end{cases}$$

Ejemplo. Si $A \cap B \neq \emptyset$ y es un conjunto infinito se obtiene lo siguiente:

Si $sup(A) > inf(B)$, entonces, $\frac{1}{sup(A)-inf(B)}\boldsymbol{I}_{A\cap B}(x) \geq \frac{1}{sup(A)-inf(A)}\boldsymbol{I}_A(x)\frac{1}{sup(B)-inf(B)}\boldsymbol{I}_B(x)$ para todo $x \in \mathbb{R}$.

Si $sup(B) > inf(A)$, entonces, $\frac{1}{sup(B)-inf(A)}\boldsymbol{I}_{A\cap B}(x) \geq \frac{1}{sup(A)-inf(A)}\boldsymbol{I}_A(x)\frac{1}{sup(B)-inf(B)}\boldsymbol{I}_B(x)$ para todo $x \in \mathbb{R}$.

Observación. Las expresiones $\underbrace{\delta\big(sup(A) - inf(B)\big)\boldsymbol{I}_A\big(sup(A)\big)\boldsymbol{I}_B\big(inf(B)\big)}_{s}$ y $\underbrace{\delta\big(sup(B) - inf(A)\big)\boldsymbol{I}_A\big(inf(A)\big)\boldsymbol{I}_B\big(sup(B)\big)}_{t}$ son excluyentes. Por tanto, si $s + t = 1$, entonces un intervalo comparte únicamente su supremo mientras que el otro comparte únicamente su ínfimo. En este caso, la intersección de los intervalos es finita.

Función piso

Se define la función $\lfloor\quad\rfloor: \mathbb{R} \to \mathbb{Z}$, así:

$$\lfloor x \rfloor = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} n\boldsymbol{I}_{[n,n+1[}(x)$$

Ejemplo. Se define la función $\boldsymbol{I}_{\mathbb{Z}}: \mathbb{R} \to \{0,1\}$, así:

$$\boldsymbol{I}_{\mathbb{Z}}(x) = \begin{cases} 0, & x \notin \mathbb{Z} \\ 1, & x \in \mathbb{Z} \end{cases}$$

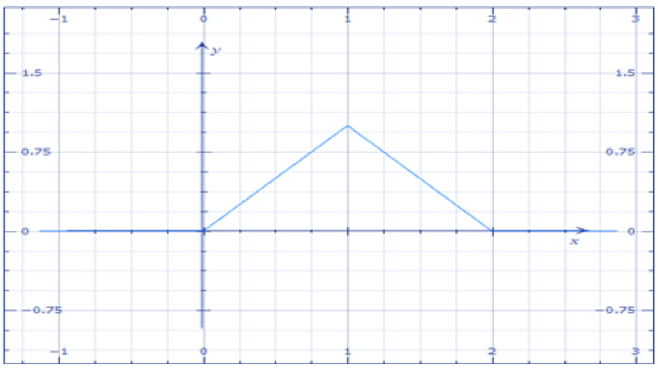
$$\boldsymbol{I}_{\mathbb{Z}}(x) = 1 - sign(x - \lfloor x \rfloor)$$

Construcción de una función continua, periódica y diferenciable a trozos

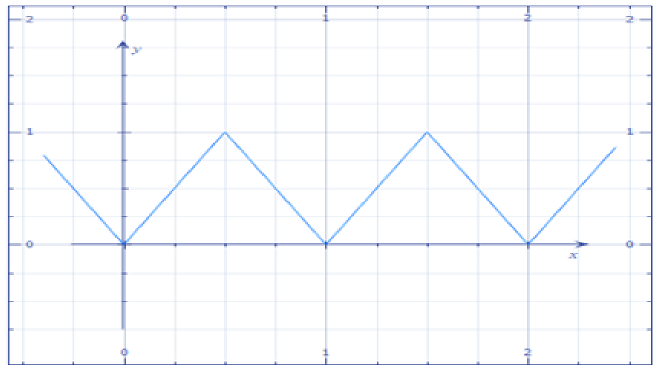
Sea la función real f continua y periódica de período π, definida así:

$$f(x) = \begin{cases} 2\left(\dfrac{x}{\pi} - n\right), & si\ x \in \left[n\pi, (2n+1)\dfrac{\pi}{2}\right[\\ -2\left(\dfrac{x}{\pi} - n\right), & si\ x \in \left[(2n+1)\dfrac{\pi}{2}, (n+1)\pi\right[\end{cases} \quad \wedge \quad n \in \mathbb{Z}$$

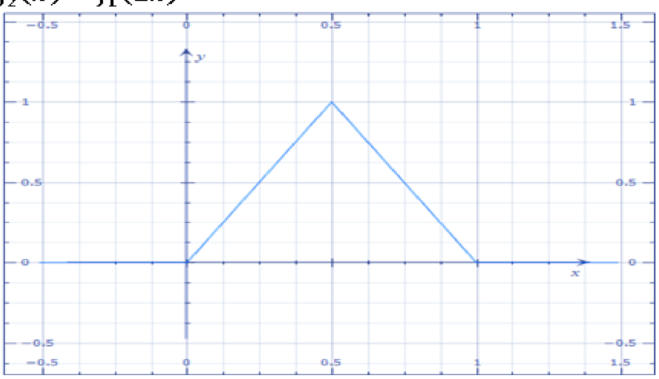
$f_1(x) = x\boldsymbol{I}_{[0,1[}(x) - (x-2)\boldsymbol{I}_{[1,2[}(x)$



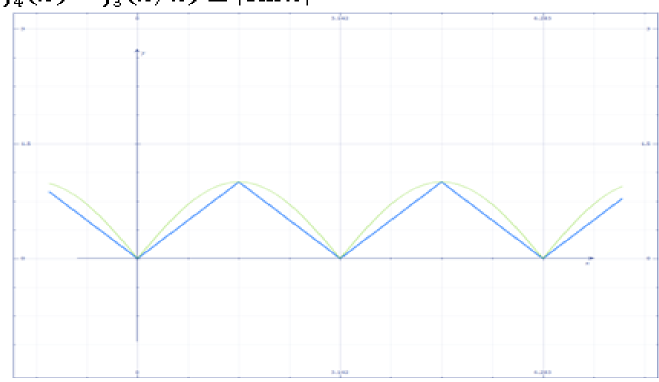
$f_3(x) = f_2(x - \lfloor x \rfloor)$



$f_2(x) = f_1(2x)$



$f_4(x) = f_3(x/\pi) \leq |\sin x|$



Observación: $\boldsymbol{I}_{[0,1[}(x - \lfloor x \rfloor) = 1$

Luego:

$$f(x) = 2\left(\frac{x}{\pi} - \left\lfloor\frac{x}{\pi}\right\rfloor\right) sign\left(1 + sign\left(2\left(\frac{x}{\pi} - \left\lfloor\frac{x}{\pi}\right\rfloor\right)\right)\right)\left[1 - sign\left(1 + sign\left(2\left(\frac{x}{\pi} - \left\lfloor\frac{x}{\pi}\right\rfloor\right) - 1\right)\right)\right] -$$
$$2\left(\left(\frac{x}{\pi} - \left\lfloor\frac{x}{\pi}\right\rfloor\right) - 1\right) sign\left(1 + sign\left(2\left(\frac{x}{\pi} - \left\lfloor\frac{x}{\pi}\right\rfloor\right) - 1\right)\right)\left[1 - sign\left(1 + sign\left(2\left(\left(\frac{x}{\pi} - \left\lfloor\frac{x}{\pi}\right\rfloor\right) - 1\right)\right)\right)\right]$$

Ejemplo. Sea la ecuación $x(x - \lfloor x \rfloor) = m$ donde m es entero. Puesto que existe un entero n tal que $0 < m \leq n < x < n+1$, es equivalente a resolver la ecuación $x^2 - nx - m = 0$ cuya solución $x = \frac{n+\sqrt{n^2+4m}}{2}$ no es entera. Además, la llamada *función de parte decimal* $x - \lfloor x \rfloor$ es periódica y por lo tanto tiene una expansión en serie de Fourier, para valores no enteros de x, la cual es:

$$\frac{1}{2} - \frac{1}{\pi}\sum_{k=1}^{\infty}\frac{\sin(2\pi k x)}{k}$$

En consecuencia,

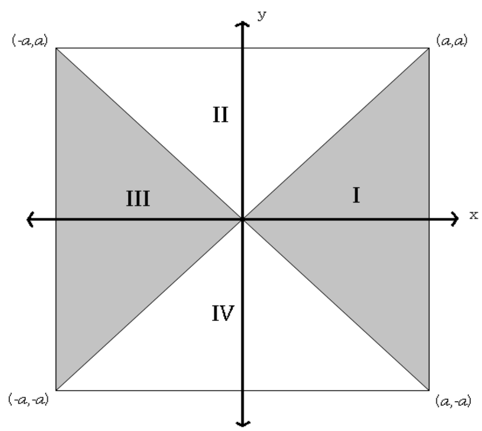
$$\sum_{k=1}^{\infty}\frac{\sin\left(\pi k\left(n+\sqrt{n^2+4m}\right)\right)}{k}=\frac{\pi}{2}\left(n+1-\sqrt{n^2+4m}\right)$$

Ejemplo. Sean $a,b\in\mathbb{R}^+$ y los vértices de la pirámide recta de base cuadrada (de intersección con el eje z: $(0,0,b)$ y de intersecciones con el plano xy: $(a,a),(-a,a),(-a,a)$ y $(a,-a)$). Es decir, los vértices de cada cara triangular están dados por:

$$\boldsymbol{A}=(0,0,b),\boldsymbol{B}=(sign(x)a,sign(y)a,0),\boldsymbol{C}=(-sign(x)sign(|y|-|x|)a,sign(y)sign(|y|-|x|)a,-b)$$

Sea $\boldsymbol{H}=(x,y,z)$ un punto cualquiera sobre estas caras, entonces la ecuación del plano de cada una de ellas es dada por:

$$\left((\boldsymbol{C}-\boldsymbol{A})\times(\boldsymbol{B}-\boldsymbol{A})\right)\cdot(\boldsymbol{H}-\boldsymbol{A})=0$$



I: $|y|<x<a$

II: $|x|<y<a$

III: $|y|<-x<a$

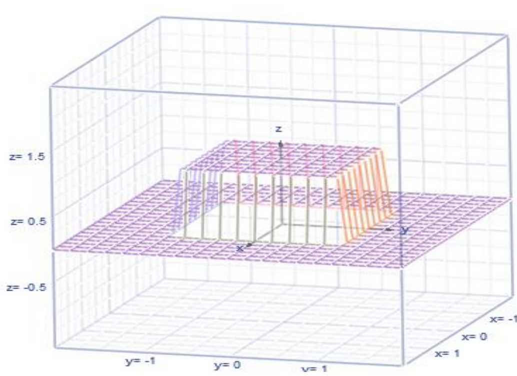
IV: $|x|<-y<a$

Por consiguiente, empleando el factor $\frac{xy(|y|-|x|)}{xy(|y|-|x|)}$ se remueve la discontinuidad en $|x|=|y|$ y se obtiene la expresión:

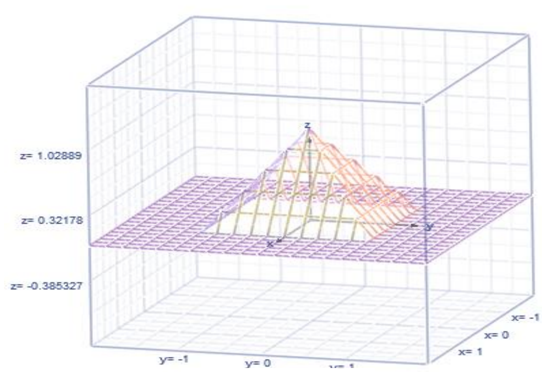
$$z=b\left(1-\frac{|x|+|y|+\big||x|-|y|\big|}{2a}\right)$$

Finalmente, se define la función $f:\mathbb{R}^2\to[0,b]$así:

$$f(x,y)=z\boldsymbol{I}_{]-a,a[^2}(x,y)$$



$\boldsymbol{I}_{]-a,a[^2}(x,y)$



$f(x,y)$

Conjunto potencia de un conjunto finito

Si $A \neq \emptyset$ es un conjunto finito, su conjunto potencia viene dado por:

$$\mathcal{P}(A) = \{\emptyset\} \cup \bigcup_{k=1}^{|A|} Im_{f_k}$$

En donde cada $f_k: \{1,2,\dots,k\} \to A$ es una función inyectiva.

Conjunto de Cantor

Sean $a, b \in \mathbb{R}$ con $a < b$. Se define el siguiente conjunto:

$$W_{[a,b]} = \left\{ I \subseteq [a,b]: I = \bigcup_{\substack{[a_i,b_i]\subseteq[a,b] \\ [a_i,b_i]\cap[a_j,b_j] \\ i,j\in\mathbb{N}, con\ i\neq j}} [a_i, b_i] \right\}$$

Se define la función $H: W_{[a,b]} \to W_{[a,b]}$, así:

$$H([a,b]) = \left[a + \frac{b-a}{3}, b - \frac{b-a}{3}\right]$$

Con la siguiente propiedad:

$$H(A \cup B) = H(A) \cup H(B), \qquad A, B \in W_{[a,b]}$$

Se define la siguiente sucesión de conjuntos cerrados $\{F_n\}_{n\in\mathbb{N}\cup\{0\}}$ así:

$$F_n = \begin{cases} [a,b], & n = 0 \\ H(F_{n-1}), & n > 0 \end{cases}$$

Cada F_n es la unión de 2^n intervalos cerrados, disyuntos, y de longitud $\left(\frac{b-a}{3}\right)^n$

Para $a = 0$ y $b = 1$, el conjunto de Cantor es definido así:

$$C = \bigcap_{n=0}^{\infty} F_n$$

C es un conjunto cerrado en los reales, no vacío, y de medida nula.

Expresada como sucesión de conjuntos $\{A_n\}_{n\in\mathbb{N}\cup\{0\}}$:

n	A_n
0	$\{0\}$
1	$\{0,2\}$
2	$\{0,2,6,8\}$
3	$\{0,2,6,8,18,20,24,26\}$
4	$\{0,2,6,8,18,20,24,26,54,56,60,62,72,74,78,80\}$

$$A_n = \begin{cases} \{0\}, & n = 0 \\ A_{n-1} \cup \{p \in \mathbb{N}: p = q + max(A_{n-1}) + 3^{n-1} + 1 \wedge q \in A_{n-1}\}, & n > 0 \end{cases}$$

Sea la sucesión de números $\{a_{n,k}\}_{\substack{n\in\mathbb{N}\cup\{0\} \\ k\in\mathbb{N} \\ k\leq 2^n}}$:

$$a_{n,k} = \begin{cases} 0, & n = 0 \\ a_{n-1,k}, & n > 0 \wedge k \leq 2^{n-1} \\ a_{n-1,k} + a_{n-1,2^{n-1}+3^{n-1}+1}, & n > 0 \wedge k > 2^{n-1} \end{cases}$$

O,

$$a_{n,k} = \begin{cases} 0, & n = 0 \\ a_{n-1,k} + a_{n-1,2^{n-1}+3^{n-1}+1}\left\lfloor\dfrac{k-1}{2^{n-1}}\right\rfloor, & n > 0 \end{cases}$$

Se define la sucesión $\{E_n\}_{n\in\mathbb{N}\cup\{0\}} \subseteq [0,1]$ cuyos términos son la unión de intervalos cerrados, disyuntos dos a dos, de la siguiente manera:

$$E_n = \bigcup_{k=1}^{2^n}\left[\left(\frac{1}{3}\right)^n a_{n,k}, \left(\frac{1}{3}\right)^n (a_{n,k}+1)\right]$$

Por tanto, $E_n \subset E_{n-1} \subset \cdots \subset E_0$. Luego, se define la sucesión de funciones indicatriz:

$$\boldsymbol{I}_{E_n}(x) = \begin{cases} 0, & x \notin E_n \\ 1, & x \in E_n \end{cases}$$

$$\boldsymbol{I}_{E_n}(x) = \sum_{k=1}^{2^n} \boldsymbol{I}_{[(1/3)^n a_{n,k}, (1/3)^n (a_{n,k}+1)]}(x)$$

Dado $\boldsymbol{I}_{E_0}(x) = 1$ (x fijo), ¿cuál es el máximo valor de n tal que $\boldsymbol{I}_{E_n}(x) = 1$?